ECOLE SPECIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1979

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

NOTA : Bien que se rapportant à un même thème, les parties I, II et III peuvent être traitées dans un ordre quelconque.
La partie IV est indépendante des trois autres.
Respecter strictement et mettre en évidence la numérotation des parties et des questions.

I - $\rho \in \mathbb{R}^*$; $\theta \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$A_n = 1 + a_1 \rho \cos\theta + a_2 \rho^2 \cos 2\theta + \ldots + a_n \rho^n \cos n\theta$,

$B_n = a_1 \rho \sin\theta + a_2 \rho^2 \sin 2\theta + \ldots + a_n \rho^n \sin n\theta$, $n \in \mathbb{N}$;

$\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$, $a_i \in \mathbb{R}$,

$\sigma_n = A_n + i B_n$, $i^2 = -1$.

1/ Calculer σ_n en fonction de ρ , θ , n pour $a_i = 1$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Pour $|\rho| < 1$, préciser $\sigma_\infty = \lim_{n \to +\infty} \sigma_n$.

Exoliciter séparément A_n et B_n en fonction de ρ , θ , n .

2/ On considère la matrice $A(\rho,\theta)$, notée A, définie par :

$$A(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

Calculer $A^2, \ldots, A^n, A^{-1}$ en fonction de ρ , θ .

On définit $S_n = I + A + A^2 + \ldots + A^n$, avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exprimer, à l'aide de A_n et B_n, les éléments de la matrice S_n .

Pour $|\rho| < 1$, les éléments de S_n admettent une limite quand $n \to +\infty$; Soit S_∞ la matrice ayant comme éléments ces limites. Expliciter S_∞ en fonction de ρ , θ . Calculer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de S_∞ en fonction de ρ , θ puis des valeurs propres de A, λ_{1A} et λ_{2A}. Préciser le produit $(I - A)\, S_\infty$.

.../...

3/ On suppose maintenant $a_1 = 1$, $a_i = \frac{1}{i!}$, $a_n = \frac{1}{n!}$, $1 < i < n$.

Calculer $\sigma_\infty = \lim_{n \to +\infty} \sigma_n$.

On considère la matrice $\Sigma_n = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!}$, avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Expliciter la matrice Σ_∞ ayant comme éléments les limites des éléments de Σ_n quand $n \to +\infty$

Calculer les valeurs propres de Σ_∞ en fonction de ρ et θ, puis en fonction des valeurs propres λ_{1A} et λ_{2A} de A .

II - E désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux, à coefficients réels, de la forme $A = \begin{pmatrix} a & m \\ o & b \end{pmatrix}$ muni de l'addition et de la multiplication matricielles, ainsi que de la multiplication par un réel.

1/ Etudier rapidement la structure de E et de son sous-ensemble E_1 formé des matrices de la forme $A_1 = \begin{pmatrix} a & m \\ o & a \end{pmatrix}$. E_1 a-t-il des diviseurs de zéro ?

2/ $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall A_1 \in E_1$, calculer A_1^p en fonction de a , p et m .

Soit $B_{1n} = I + \frac{A_1}{1!} + \frac{A_1^2}{2!} + \ldots + \frac{A_1^n}{n!} = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} & \mu_{1n} \\ 0 & \beta_{1n} \end{pmatrix}$; avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer α_1 , β_1 , μ_1 limites respectives de α_{1n} , β_{1n} , μ_{1n} quand l'entier n tend vers $+\infty$.

Soit $B_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \mu_1 \\ 0 & \beta_1 \end{pmatrix}$, notée $e^{A_1} = \exp A_1$.

3/ $\forall p \in \mathbb{N}$ et $\forall A \in E - E_1$, calculer A^p en fonction de a , b , m et p .

Soit $B_n = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} = \begin{pmatrix} \alpha_n & \mu_n \\ 0 & \beta_n \end{pmatrix}$;

Calculer α , β , μ , limites respectives de α_n , β_n , μ_n quand l'entier n tend vers $+\infty$.

Soit $B = \begin{pmatrix} \alpha & \mu \\ o & \beta \end{pmatrix}$, notée $e^A = \exp A$.

Retrouver B_1 à partir de B quand b tend vers a .

4/ Soient $A = \begin{pmatrix} a & m \\ o & b \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & m' \\ o & b' \end{pmatrix}$, deux éléments de E . Trouver une condition nécessaire et suffisante entre les coefficients des matrices A et A' – équivalente à une condition entre matrices – pour que l'on ait :

$$\exp A \, . \exp A' = \exp(A + A') \, .$$

Etudier le cas où $A = A_1 \in E_1$.

5/ On cherche deux fonctions x et y , de la variable réelle t , développables en série de Mac Laurin, telles que :

$$\begin{cases} x'(t) = a\,x(t) + m\,y(t) \\ y'(t) = b\,y(t) \end{cases}$$

a, b, m réels, x' et y' désignant les dérivées premières de x et y par rapport à t .

Exprimer la matrice $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ en fonction des matrices exp (tA) et $\begin{pmatrix} x(o) \\ y(o) \end{pmatrix}$.

. . . / . . .

III - a et b sont réels.

On donne la matrice $M = \begin{pmatrix} a & -a & b \\ -a & a & -b \\ b & -b & 2a-b \end{pmatrix}$

1/ Calculer les valeurs propres de M ; M est-elle diagonalisable ?

2/ $a = \frac{1}{6}$ et $b = \frac{2}{3}$; $S_n(t) = \sum_{p=1}^{n} \frac{t^p}{p!} M^p$, $t \in \mathbb{R}^*$.

Trouver deux fonctions polynômes f_n et g_n telles que :

$$S_n(t) = f_n(t)\, M^2 + g_n(t)\, M ;$$

préciser f_n et g_n, suivant la parité de n.

Trouver $f(t) = \lim_{n \to +\infty} f_n(t)$ et $g(t) = \lim_{n \to +\infty} g_n(t)$.

Ecrire la matrice $S(t) = f(t)\, M^2 + g(t)\, M$ en fonction de t, M, M^2.

Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de S(t) en fonction des valeurs propres et des vecteurs propres de M.

La matrice S(t) est-elle diagonalisable ?

3/ $a = \frac{1}{6}$ et $b = \frac{2}{3}$.

On considère le système différentiel (I) $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

On cherche les solutions x(t), y(t), z(t) du système (I) développables en série de Mac Laurin.

Exprimer la solution $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ de ce système à l'aide de exp (tM) et de $\begin{pmatrix} x(o) \\ y(o) \\ z(o) \end{pmatrix}$, avec :

$$\exp(tM) = I + S(t) \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IV - $M_n(\mathbb{C})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à éléments dans $\mathbb{C}$.

A toute matrice $A = (a_{ij})$ de $M_n(\mathbb{C})$ on associe :

$$\|A\|_1 = \frac{1}{n} \sum_{i,j} |a_{ij}| \quad \text{et} \quad \|A\|_\infty = \sup_{i,j} |a_{ij}| .$$

1/ Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $M_n(\mathbb{C})$.

Les comparer entre elles.

2/ Définir pour chaque norme, la boule fermée unité de centre O, B_i (i = 1, ∞). Donner la norme de la matrice unité. La boule B_i est-elle compacte ?

3/ Montrer qu'il existe un réel α_i (i = 1, ∞), tel que, pour tout couple d'éléments (A,B) de $M_n(\mathbb{C})$ on ait :

$\|AB\|_i \leqslant \alpha_i \|A\|_i \|B\|_i$; trouver α_i le plus petit possible.

Trouver deux éléments A et B de B_i tels que $\|AB\|_i$ atteigne sa borne.

»»»»■▌■«««««

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail